LA TRANSFORMATION EN Z.

Un cours niveau BTS.

Pierre López

Groupe Mathématiques et Sciences Physiques au Lycée, IREM de Toulouse.

Membres : Mmes Michèle Fauré, Monique Mandleur, Monique Sosset.

Introduction.

Dans un précédent article (« Fil d'Ariane » n°18 avril 2003), j'ai présenté le contexte physique d'intervention de la transformation en z et fait remarquer que l'on pouvait faire le lien avec la transformation de Laplace via une « théorie » basique des distributions.

Je concluais en disant en substance que la volonté d'actualiser l'enseignement des mathématiques dans les sections de techniciens supérieurs en tenant compte des pratiques de l'enseignement de la physique était une bonne chose. Mais ceci nécessitait un travail de concertation important sous peine d'être en décalage avec les préoccupations des professeurs de physique et de créer un outil artificiel sans réelle application[1].

Ceci prend du temps.

L'IREM me l'a donné. Au-delà des discussions au sein du groupe de recherche, j'ai pu consacrer du temps à interroger M. François Jongbloet, professeur de physique appliquée de la section BTS « électronique » au lycée Louis Rascol à Albi, et recueillir l'avis de M. Jean-José Orteu, professeur à l'Ecole des Mines d'Albi-Carmaux. Je les remercie de leur collaboration.

Je remercie aussi M. Gabriel Birague, professeur de physique appliqué, et M. Antoine Rossignol, professeur de mathématiques, pour la relecture attentive qu'ils ont bien voulu faire de ce texte.

---

[1] On pourra voir ce que cela donne dans un sujet d'examen avec le BTS groupe A 2004.

Il en est résultait un cours à l'intention des étudiants de la section de techniciens supérieurs « électronique » du lycée Louis Rascol à Albi.

Ce cours a été élaboré avec l'ambition d'une part de respecter les programmes et d'autre part de tenir compte des différentes discussions.

Il a été mis en pratique pendant deux ans (années scolaires 2003-2004 et 2004-2005).

Avec les modifications induites par ces mises en pratique, le texte qui suit correspond à ce cours.

Remarque sur le texte :

Le document distribué aux étudiants ne comportait ni note, ni démonstration, ni commentaire.

1. Définition.

a. Définition générale.

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$. On appelle transformée en z de $(x_n)_{n\in N}$ la fonction, notée $Z[x_n]$, de la variable complexe z définie, lorsqu'il y a convergence, par :

$$Z[x_n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, z^{-n} .$$

b. Ensemble de définition.

Vu les résultats sur le rayon de convergence d'une série entière, on peut dire que trois cas peuvent se présenter :

- soit la transformée en z est définie quel que soit le nombre complexe z, non nul[2] ;
- soit il existe un nombre réel positif ou nul R tel que pour z tel que $|z| > R$ la transformée en z est définie, et pour z tel que $|z| < R$ la transformée en z n'est pas définie ;
- soit la transformée en z n'est définie pour aucun nombre complexe z .

[2] Il se peut que la transformée soit prolongeable par continuité en 0. Cependant un résultat sur les fonctions holomorphes entraîne que dans ce cas la transformée est une fonction constante.

<u>Remarque :</u> Si la transformée en z est définie pour z tel que $|z| > R$ avec $R < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \mathcal{Z}[x_n](1).$$

La transformation en z pourra donc servir au calcul de la somme d'une série.

c. Transformée en z d'un signal échantillonné.

On considère un signal (analogique) défini par $x(t)$.

L'échantillonner consiste à s'intéresser aux valeurs du signal pour les valeurs nT de la variable, où T est appelée période d'échantillonnage[3].

On a donc une suite $(x(nT))_{n\in N}$, à laquelle on peut appliquer la transformation en z.

Pour simplifier les notations, on notera $\mathcal{Z}[x]$ (ou $\mathcal{Z}[x(t)]$) sa transformation en z, voir $X(z)$.

$$\mathcal{Z}[x](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\, z^{-n} = X(z).$$

On prendra garde au fait que parler de la transformée en z du signal x est abusif, dans la mesure où cela dépend de la période d'échantillonnage T[4].

2. Exemples.

a. « Impulsion ».

On définit la suite $(d_n)_{n\in N}$ par : $d_0 = 1$ et $d_n = 0$ pour n non nul. On a immédiatement :

pour tout complexe z, $\mathcal{Z}[d](z) = 1$.

[3] Le physicien note T_e. Nous ne l'avons pas fait pour alléger les notations qui sont déjà lourdes et source d'incompréhension chez les étudiants. Cependant on aurait peut-être dû !

[4] M. Gabriel Birague va jusqu'à dire que « T est un paramètre de la variable z ».

b. « Echelon ».

Soit la suite $(U_n)_{n\in N}$ telle que pour tout entier n $U_n = 1$. De manière abusive (mais commode), on la note 1 . A l'aide du résultat sur les séries géométriques, on a :

$$\text{pour } z \text{ tel que } |z| > 1 ,\ Z[1](z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} .$$

c. « Rampe ».

De même on note n la suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que, pour tout entier n , $x_n = n$.

$$\text{Pour } z \text{ tel que } |z| > 1 ,\ Z[n](z) = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} .$$

Démonstration :

A partir du cours sur les séries entières, pour z avec $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$,

donc :

$$\text{pour } z \text{ avec } |z| > 1 ,\ Z[n](z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{-n} = \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} .$$

d. Suites géométriques.

Soit a un nombre réel non nul. On considère la suite (a^n).

$Z[a^n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a z^{-1}\right)^2$, donc :

$$\text{pour } z \text{ avec } |z| > |a|,\ Z[a^n](z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} .$$

e. Application : échantillonné d'un signal exponentiel.

Soit un signal x défini par $x(t) = e^{-\alpha t} U(t)$.
Avec la période d'échantillonnage T , l'échantillonné est défini par $e^{-\alpha n T} = (e^{-\alpha T})^n$.
Donc avec ce qui précède en prenant $a = e^{-\alpha T}$,

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} .$$

Remarque : On peut montrer en appliquant la définition directement que ce dernier résultat est aussi valable pour α complexe.

3. Propriétés.

a. Linéarité.

Soit deux suites $(u_n)_{n\in N}$, $(w_n)_{n\in N}$ admettant des transformées en z de domaine de convergence non vide. Alors, sur au moins l'intersection des deux domaines de convergence,

$$\mathcal{Z}[a u_n + b w_n](z) = a \mathcal{Z}[u_n](z) + b \mathcal{Z}[w_n](z).$$

1) Application aux signaux échantillonnés.

α) Soit le signal x définie par $x(t) = t U(t)$. Avec la période d'échantillonnage T son échantillonné est défini par nT , donc sa transformée en z est

$$X(z) = T \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = T \frac{z}{(z-1)^2} .$$

β) Soit le signal x définie par $x(t) = t^2 U(t)$. Avec la période d'échantillonnage T son échantillonné est défini par $(nT)^2$, donc sa transformée en z est

$$X(z) = T^2 \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = T^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} .$$

2)Application aux signaux échantillonnés de signaux sinusoïdaux.

Avec les formules d'Euler, on montre sans difficulté que :

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega nT)](z) = \frac{\sin(\omega T)\ z}{z^2 - 2\cos(\omega T)\ z + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega nT)](z) = \frac{z^2 - \cos(\omega T)\ z}{z^2 - 2\cos(\omega T)\ z + 1}$$

b. Multiplication par a^n.

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$ et a un nombre réel non nul.

On définit la suite $(y_n)_{n\in N}$ par $y_n = a^n x_n$.

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\ (a^{-1}z)^{-n} = \mathcal{Z}[x_n](a^{-1} z) .$$

Si la transformée en z de $(x_n)_{n\in N}$ est définie pour $|z| > R$, la transformée en z de $(y_n)_{n\in N}$ est définie pour $|z| > |a|\,R$.

Sans s'attarder sur ces conditions de validité[5], on retiendra que :

$$\mathcal{Z}[a^n x_n](z) = \mathcal{Z}[x_n]\left(\frac{z}{a}\right) .$$

Cas particuliers.

α) La transformée en z de $(x_n)_{n\in N}$ définie par $x_n = n \,.\, a^n$ est :

$$X(z) = \frac{z/a}{(z/a-1)^2} = \frac{a z}{(z-a)^2} .$$

---

[5] Par la suite on ne précisera plus les conditions de validité des formules trouvées. Cela n'est pas « pratiquement » gênant dans la mesure où ces écritures ne sont en général que des intermédiaires.

β) Cas des signaux multipliés par une exponentielle :
Soit $y(t) = e^{-\alpha t} x(t)$. l'échantillonné de y est défini par $e^{-\alpha n T} x(nT)$. On applique le résultat précédent avec $a = e^{-\alpha T}$. D'où :

$$Z[e^{-\alpha t} x(t)](z) = Z[x](e^{\alpha T} z).$$

Exemple :
Soit le signal $x(t) = t . e^{-\alpha t} . U(t)$.
L'échantillonné est défini par $x_n = e^{-\alpha n T} . n . T$, donc vu l'exemple précédent :

$$X(z) = \frac{T e^{-\alpha T} z}{\left(z - e^{-\alpha T}\right)^2} .$$

Exercices :
Montrez les résultats suivants qui correspondent aux transformées en z des « signaux sinusoïdaux amortis ».

$$Z[e^{-\alpha n T} \sin(\omega nT)](z) = \frac{e^{-\alpha T} \sin(\omega T) z}{z^2 - 2 e^{-\alpha T} \cos(\omega T) z + e^{-2\alpha T}},$$

$$Z[e^{-\alpha n T} \cos(\omega nT)](z) = \frac{z^2 - e^{-\alpha T} \cos(\omega T) z}{z^2 - 2 e^{-\alpha T} \cos(\omega T) z + e^{-2\alpha T}} .$$

c. Translation sur la variable d'un signal causal.

1. Retard.

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$. On définit la suite $(y_n)_{n\in N}$ par $y_n = x_{n-k}$ avec k entier (positif) fixé.
Il faut comprendre que cette notation est abusive pour $n < k$, puisque $n - k < 0$ et donc x_{n-k} n'est pas défini.
On convient que x_n a un sens pour n entier relatif négatif avec $x_n = 0$ dans ce cas. Cela correspond à la situation des signaux échantillonnés « causaux ».
En conséquence, $y_n = 0$ pour $n < k$.

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-k}\, z^{-n} = \sum_{n=k}^{+\infty} x_{n-k}\, z^{-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} x_m\, z^{-m-k} = z^{-k} \sum_{m=0}^{+\infty} x_m\, z^{-m} = z^{-k}\, \mathcal{Z}[x_n](z) .$$

On retiendra de manière abusive mais commode :

$$\mathcal{Z}[x_{n-k}](z) = z^{-k}\, \mathcal{Z}[x_n](z) .$$

Exercice :

On considère une suite $(x_n)_{n\in N}$ et X sa transformée en z . On définit la suite $(y_n)_{n\in N}$ par $y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Déterminez une équation « aux différences » entre les suites $(x_n)_{n\in N}$ et $(y_n)_{n\in N}$. Déduisez-en la transformée en z de $(y_n)_{n\in N}$.

Solution :

Pour tout n entier, on a $y_n - y_{n-1} = x_n$, en considérant que $y_{-1} = 0$.

Donc $Y(z) - z^{-1}\, Y(z) = X(z)$, donc : $Y(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}\, X(z) = \dfrac{z}{z-1}\, X(z)$.

2. Avance.

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$. On définit la suite $(y_n)_{n\in N}$ par $y_n = x_{n+k}$ avec k entier (positif) fixé.

Ici, il faut bien remarquer que y_n n'est défini que pour n entier (positif) ; y_n traduit quelque chose de causal.

En d'autres termes on peut dire que $y_n = 0$ pour les entiers relatifs négatifs. Ce point de vue sera systématiquement adopté en cas de besoin.

En conséquence le passage de x_n à y_n « supprime » les termes x_n pour $n < k$.

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k}\, z^{-n} = \sum_{m=k}^{+\infty} x_m\, z^{-m+k} = z^{k} \sum_{m=k}^{+\infty} x_m\, z^{-m} =$$

$$z^{k}\left[Z[x_n](z)-x_0-x_1 z^{-1}-\ldots-x_{k-1} z^{-(k-1)}\right].$$

On retiendra de manière abusive mais commode :

$$Z[x_{n+k}](z) = z^{k} Z[x_n](z) - x_0 z^{k} - x_1 z^{k-1} - \ldots - x_{k-1} z .$$

Exemple :

$Z[x_{n+3}](z) = z^3 Z[x_n](z) - x_0 z^3 - x_1 z^2 - x_2 z$.

d. Dérivée d'une transformée en z.

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$ de transformée en z notée X définie (au moins) à l'extérieur du disque de centre O et de rayon R .
En remarquant tout d'abord qu'une série entière étant dérivable à l'intérieur de son disque de convergence, avec le théorème de la dérivée d'une fonction composée, on a, pour z tel que $|z|>R$:

$$(Z[x_n])'(z) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n x_n \left(z^{-1}\right)^{n-1}\right).\left(\frac{-1}{z^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n x_n z^{-n-1} .$$

On remarquera que cette dernière expression correspond formellement à la dérivée « sous le signe somme » de la transformation en z .

On a donc : $(Z[x_n])'(z) = -z^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} n x_n z^{-n}$,

que l'on retiendra sous la forme :

$$Z[n\, x_n](z) = - z\, (Z[x_n])'(z)$$

Exemple : « Rampe de vitesse ».

$$Z[n^2](z) = Z[n\,.\,n](z) = - z \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = \frac{-z(-1-z)}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} .$$

On remarquera que, ici, ceci est valable pour z tel que $|z|>1$. On retiendra :

$$Z[n^2](z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{\left(1-z^{-1}\right)^3} .$$

e. Théorèmes limites.

1. Théorème de la valeur initiale.

Etant donné la continuité en 0 d'une série entière de rayon de convergence non nul, on a pour une suite $(x_n)_{n\in N}$ de transformée en z définie à l'extérieur du disque de centre O et de rayon R :

$$\lim_{"z \to +\infty"} X(z) = x_0 \ .$$

2. Théorème de la valeur finale[6].

Soit une suite $(x_n)_{n\in N}$ et X sa transformée en z.

On suppose que X peut être définie sur ***C*** privé d'un nombre fini de points, tous à l'intérieur du cercle "unité", sauf éventuellement un pôle simple en 1. Alors :

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) X(z) = \lim_{n \to +\infty} x_n \text{, cette limite étant finie.}$$

Exemple :

Soit (x_n) est une suite géométrique, avec $x_n = a^n$ et $|a| < 1$, X a un pôle (a) à l'intérieur du cercle "unité", on a $\lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z-1}{z} \dfrac{z}{z-a} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Commentaires concernant les hypothèses[7] :

1) Dans le cas de la « rampe », c'est-à-dire lorsque $x_n = n$, X a un pôle double en 1, et $\lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z-1}{z} \dfrac{z}{(z-1)^2} = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{1}{(z-1)}$ que l'on peut considérer donner la limite de (x_n) en se restreignant aux valeurs réelles de z supérieures à 1.

---

[6] L'énoncé de ce théorème varie de manière assez significative d'un auteur à l'autre. On trouvera en annexe 2 divers énoncés répertoriés selon les auteurs.

[7] La démonstration de ce théorème (hors programme en sections de techniciens supérieurs) utilisant des résultats sur les fonctions holomorphes est renvoyée en annexe 1.

On remarquera qu'avec les mêmes hypothèses, plus l'existence de la limite de (a_n), dans le cas général d'un pôle double en 1, on a :

$$\lim_{z \to 1} \left| (1 - z^{-1})\, X(z) \right| = \lim_{n \to +\infty} | x_n |,$$

cette limite ici étant infinie.

2) Cependant le cas des signaux sinusoïdaux échantillonnés enlève l'espoir d'hypothèses plus larges.

En effet pour ωT différent d'un multiple de 2π, c'est-à-dire lorsque la période d'échantillonnage n'est pas un multiple de la période du signal (ce qui ferait que l'échantillonné serait constant), on a $Z[\sin(\omega n T)](z) = \dfrac{\sin(\omega T)\ z}{z^2 - 2\cos(\omega T)\ z + 1}$ donc la transformée a des pôles ($e^{i\omega T}$ et $e^{-i\omega T}$) sur le cercle "unité" différents de 1, et

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{\sin(\omega T)\ z}{z^2 - 2\cos(\omega T)\ z + 1} = \lim_{z \to 1} \frac{\sin(\omega T)\,(z-1)}{z^2 - 2\cos(\omega T)\ z + 1} = 0,$$

qui n'est bien sûr pas la limite de l'échantillonné !

<u>4. Inversion.</u>

On considère une suite $(x_n)_{n \in N}$, et X sa transformée en z .

Le but de ce paragraphe est de donner des techniques permettant de retrouver $(x_n)_{n \in N}$ à partir de la connaissance de X .

<u>a. Lecture inverse d'une table de transformées.</u>

<u>Exemples :</u>

1) Soit $X(z) = \dfrac{2z}{z - 0{,}5}$. Vu le 2°) d) $x_n = 2 \,.\, 0{,}5^n$.

2) Soit $X(z) = \dfrac{2{,}7\,z}{(z - 1{,}2)^2}$.

On reconnaît la forme d'une « rampe » multipliée par une suite géométrique. Par identification, on prend $a = 1{,}2$. Donc en écrivant :

$$X(z) = 2{,}25\,\frac{1{,}2\,z}{(z-1{,}2)^2} \quad \text{on en déduit :} \qquad x_n = 2{,}25\ n\ .\ 1{,}2^{\,n}\ .$$

Remarque :

Eventuellement (suivant le caractère plus ou moins exhaustif de la table dont on dispose), on peut être amené à faire apparaître la variable z/a :

$$X(z) = \frac{2{,}7}{1{,}2}\,\frac{z/1{,}2}{(z/1{,}2-1)^2} \quad \text{et on utilise le théorème correspondant.}$$

3) Soit $X(z) = \dfrac{z}{32{,}6\,z^2 - 51{,}2\,z + 30{,}6}$.

On pense à la transformée en z de l'échantillonnée d'un signal sinusoïdal amorti (on remarque que le discriminant du dénominateur est négatif).

On transforme l'écriture et on identifie.

Remarque pratique importante :

On donne systématiquement des valeurs approchées (ici à trois chiffres significatifs), mais les calculs sont faits avec la plus grande précision permise par la calculatrice.

Cela donne : $\dfrac{z}{32{,}6\,z^2 - 51{,}2\,z + 30{,}6} = \dfrac{1}{32{,}6}\,\dfrac{z}{z^2 - 1{,}57\,z + 0{,}94}$.

$2\cos(\omega T)\ e^{-aT} = 1{,}57$

$e^{-2aT} = 0{,}94$.

On en déduit successivement :

$e^{-aT} = 0{,}969$ donc $aT = 0{,}0305$

$\cos(\omega T) = 0{,}810$.

On remarquera qu'une conséquence de la condition de Shannon (« la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal ») est que ωT est inférieur à π (et est naturellement positif), on a donc :

$\omega T = \arccos 0{,}810 = 0{,}627$

$\sin(\omega T) = \sqrt{1-\cos^2 \omega T} = 0{,}586$.

Enfin : $e^{-aT}\sin(\omega T) = 0{,}569$.

Et on procède à la transformation d'écriture :

$$\frac{z}{32{,}6\,z^2 - 51{,}2\,z + 30{,}6} = \frac{1}{18{,}55}\,\frac{0{,}57\,z}{z^2 - 1{,}57\,z + 0{,}94}\,.$$

D'où par lecture inverse de la table de transformées :

$$x_n = 0{,}054 \,.\, e^{-0{,}03\,n} \sin(0{,}63.n)\,.$$

Remarque :

Si on connaît la fréquence d'échantillonnage, par exemple 1000 Hz, on peut « remonter » au signal :

$T = 10^{-3}$ donc $a = 0{,}03 \,.\, 10^3 = 30{,}5$ et $\omega = 0{,}63 \,.\, 10^3 = 626$, d'où :

$$x(t) = 0{,}054 \,.\, e^{-30{,}5\,t} \sin(626.t) \,.\, U(t)\,.$$

Généralisation de la technique :

Soit une transformée en z de la forme : $X(z) = \dfrac{a z^2 - b z}{c z^2 - d z + e}$, avec a, b, c, d et e positifs et le discriminant du dénominateur négatif.

On met c en facteur au dénominateur ;

on identifie au dénominateur avec $z^2 - 2\,e^{-aT}\cos(\omega T)\,z + e^{-2aT}$;

on détermine e^{-aT} et $\cos(\omega T)$ (les conditions imposées rendent possible ces calculs) ;

on calcule $\sin(\omega T)$, et on transforme le numérateur pour faire apparaître une combinaison linéaire de $e^{-aT}\sin(\omega T)\,z$ et $z^2 - e^{-aT}\cos(\omega T)\,z$;

on lit alors « à l'envers » les transformées des sinus et cosinus « amortis ».

Exercice :

Déterminez l'original pour la transformation en z de $X(z) = \dfrac{0{,}64\,z(z-1)}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}42}$.

Solution :

On a successivement :

$e^{-2aT} = 0{,}42$; $e^{-aT} = 0{,}648$; $aT = 0{,}434$;

$2\cos(\omega T)\, e^{-aT} = 1{,}15$; $\cos(\omega T) = 0{,}887$; $\omega T = 0{,}479$ (en tenant compte de la condition de Shannon);

$\sin(\omega T) = 0{,}461$; $e^{-aT}\sin(\omega T) = 0{,}299$.

D'où les transformations d'écriture :

$$X(z) = 0{,}64\,\frac{z^2 - 0{,}575z}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}42} - 0{,}64\,\frac{0{,}425z}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}42}\ ;$$

$$X(z) = 0{,}64\,\frac{z^2 - 0{,}575z}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}42} - 0{,}910\,\frac{0{,}299z}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}42}.$$

D'où : $x_n = [0{,}64\cos(0{,}48\,n) - 0{,}91\sin(0{,}48\,n)]\; e^{-0{,}43\,n}$.

b. Décomposition en éléments simples.

1° cas : X(z) "s'annule" pour z = 0.

Dire que X(z) s'annule pour z = 0 est purement formel puisque en général une transformée en z n'est pas définie en 0 .
Cette méthode est basée sur le résultat suivant :

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} .$$

En conséquence si on considère une transformée en z , X , écrite sous la forme d'une fonction rationnelle en z dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur et admettant uniquement des pôles simples (par exemple deux pôles a et b), alors, vu la condition sur les degrés, on peut écrire :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b} \text{ donc } X(z) = \frac{Az}{z - a} + \frac{Bz}{z - b} .$$

On remarquera que le fait que X(z) "s'annule" pour z = 0 entraîne qu'il n'y pas de terme en $\frac{1}{z}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{X(z)}{z}$.

Dont on déduit : $x_n = A . a^n + B . b^n$.

Exemple : Soit $X(z) = \alpha K \frac{z^2}{\left(z - (1-K)\right)(z-1)}$.

On écrit $\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z - (1-K)} + \frac{B}{z - 1}$;

on a $A = \lim_{z \to 1-K} (z-(1-K))\frac{X(z)}{z} = - \alpha (1 - K)$, et $B = \lim_{z \to 1} (z-1)\frac{X(z)}{z} = \alpha$.

D'où : $X(z) = \alpha \frac{-(1-K)z}{z - (1-K)} + \frac{z}{z - 1}$, donc $x_n = \alpha [1 - (1 - K)^{n+1}]$.

Remarque :
Cette méthode se généralise lorsqu'il y a des pôles doubles, en particulier, en utilisant le résultat : $\mathcal{Z}[n.\, a^n](z) = \frac{a z}{(z-a)^2}$. Dans ce cas la forme de la décomposition sera donnée.

2° cas : en général.

Dans le cas général, on pourra essayer de procéder à une « récriture décomposée » de $X(z)$ permettant de faire apparaître des transformées usuelles.
Le plus souvent, une décomposition en éléments simples de $X(z)$ pourra être exploitée en passant à l'écriture avec z^{-1} et en utilisant le théorème du retard.

Exemple : Soit $X(z) = \dfrac{2z^2 - 8z + 5}{(z-2)(z-1)}$.

La décomposition en éléments simples donne : $X(z) = 2 - \dfrac{3}{(z-2)} + \dfrac{1}{(z-1)}$,

qu'on écrit : $X(z) = 2 - \dfrac{3z^{-1}}{(1-2z^{-1})} + \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}$,

d'où par application « inverse » du théorème du retard (et de transformées usuelles) :

$$x_n = 2 . d_n - 3 . 2^{n-1} . U_{n-1} + U_{n-1} .$$

5. Applications[8].

a. Filtre numérique passe-bas du 1° ordre.

Pour un filtre analogique passe-bas du 1° ordre la relation différentielle entre le signal d'entrée e et le signale de sortie s est de la forme :

$$\tau . s'(t) + s(t) = \alpha . e(t) ,$$

α et τ étant des réels positifs.

Si on veut remplacer ce filtre analogique par un filtre numérique on remplace les signaux analogiques par des échantillonnés $e_n = e(n . T_e)$, $s_n = s(n . T_e)$, et la dérivée de s par $\dfrac{s_n - s_{n-1}}{T_e}$.

[8] M. Gabriel Birague me suggère de faire remarquer que les deux exemples que je fais traiter illustre la synthèse de filtres numériques à partir d'une fonction de transfert en p selon deux techniques : équivalence par rapport à la dérivation, puis équivalence par rapport à l'intégration.

On remarquera qu'il n'est pas ici question de discuter de la pertinence a priori de cette démarche. En particulier, il ne sert à rien de dire que (sous certaines conditions) $\frac{s_n - s_{n-1}}{T_e}$ est une « bonne approximation » de $s'(t)$.

On aboutit donc à la « relation de récurrence » :

$$\tau . \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e} + s_n = \alpha . e_n$$

qui se récrit :

$$s_n - \frac{\tau}{\tau + T_e} . s_{n-1} = \alpha . \frac{T_e}{\tau + T_e} e_n$$

En électronique on pose $K = \frac{T_e}{\tau + T_e}$, d'où :

$$s_n - (1 - K). s_{n-1} = \alpha . K . e_n .$$

On notera que cette relation est supposée valide pour tout entier n ; cela entraîne que l'on considère que s_{-1} est défini et égal à 0 .

En appliquant la transformation en z à cette relation de récurrence linéaire à coefficients constants, on a en utilisant différentes propriétés de cette transformation :

$$S(z) - (1 - K) z^{-1} S(z) = \alpha . K . E(z)$$

où S et E sont les transformées en z des suites (s_n) et (e_n) .

On en déduit :

$$S(z) = \frac{\alpha K}{1 - (1 - K) z^{-1}} E(z) .$$

1° cas : réponse « impulsionnelle ».

Soit $(e_n) = (d_n)$. On a alors $E(z) = 1$, donc

$$S(z) = \frac{\alpha K}{1 - (1 - K) z^{-1}} = \alpha K \frac{z}{z - (1 - K)} .$$

Par lecture inverse d'une table de transformées, on en déduit que : $s_n = \alpha K (1 - K)^n$.

<u>Remarque :</u>

On peut vérifier « à la main » ce résultat en revenant à la relation de récurrence en la récrivant sous la forme : $s_n = (1 - K).\, s_{n-1} + \alpha \,.\, K \,.\, e_n$, et en calculant les premiers termes de (s_n) du tableau suivant usuel en électronique :

n	-1	0	1	2	3
e_n	0	1	0	0	0
s_{n-1}		0	αK	$\alpha K(1-K)$	$\alpha K(1-K)^2$
s_n	0	αK	$\alpha K(1-K)$	$\alpha K(1-K)^2$	$\alpha K(1-K)^3$

<u>Application numérique :</u>

On suppose que $\dfrac{T_e}{\tau} = 0{,}2$ et que $\alpha = 1$. On en déduit $K = \dfrac{1}{6}$ et $s_n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 0$.

On peut retrouver ce résultat par l'application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) S(z) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{6} \frac{z}{z - \frac{5}{6}} = 0 .$$

On notera que le pôle de $S(z)$ est dans le cercle « unité ».

Comparaison à la réponse en analogique :

Si on reprend la relation différentielle de départ, avec $e(t) = \delta$ (« distribution » de Dirac), en appliquant la méthode de Laplace avec les condition initiale nulle, on a successivement :

$$S(p) = \frac{1}{\tau p + 1} ,$$

$$s(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} U(t) .$$

Donc aux instants d'échantillonnage, on a :

$$s(n\, T_e) = \frac{1}{\tau} \left(e^{-\frac{T_e}{\tau}} \right)^n \text{ avec } e^{-\frac{T_e}{\tau}} = 0{,}82 \text{ arrondi à } 10^{-2} \ \left(\frac{5}{6} = 0{,}83 \ldots\right) .$$

2° cas : réponse « indicielle ».

On prend $e_n = 1$ pour tout entier n . Alors $E(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$.

Donc :

$$S(z) = \frac{\alpha K}{1 - (1-K)\, z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \ ;$$

$$S(z) = \alpha K \frac{z^2}{\big(z - (1-K)\big)(z-1)} \ .$$

Or vu le 4°), b) :

$$s_n = \alpha\,[1 - (1 - K)^{n+1}] \ .$$

Remarque :

Vérifions « à la main » ce résultat sur les premiers termes : $s_n = (1 - K).\ s_{n-1} + \alpha\ .\ K\ .\ e_n$

n	-1	0	1	2
e_n	0	1	1	1
s_{n-1}		0	αK	$\alpha K(1\text{-}K)+ \alpha K$
s_n	0	αK	$\alpha K(1\text{-}K)+ \alpha K$	$\alpha K(1\text{-}K)^2+ \alpha K(1\text{-}K)+ \alpha K$

En utilisant la égalité : $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\,(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + b^n)$
on vérifie bien l'égalité trouvée plus haut.

Application numérique :

On suppose que $\dfrac{T_e}{\tau} = 0{,}2$ et que $\alpha = 1$. On en déduit $K = \dfrac{1}{6}$ et $s_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}$.

On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$.

On peut retrouver ce résultat par l'application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) S(z) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \ \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 \ .$$

On notera qu'un pôle de $S(z)$ est dans le cercle « unité », l'autre est sur le cercle « unité », mais en fait c'est 1 , et c'est un pôle simple.

b. Intégrateur numérique.

Un filtre analogique est dit « intégrateur » si la sortie s est définie par :

$$s(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t e(x)\,dx \text{ , où } \tau \text{ est un réel positif.}$$

Pour remplacer ce filtre analogique par un filtre numérique, on remarque que :

$$s(n.T_e) = s((n-1).T_e) + \frac{1}{\tau}\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} e(x)\,dx \,.$$

Alors en considérant des signaux échantillonnés $e_n = e(n.T_e)$, $s_n = s(n.T_e)$ et on remplace

$$\frac{1}{\tau}\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} e(x)\,dx \quad \text{par} \quad \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{2}\,T_e\,\left[e(nT_e) - e((n-1)T_e)\right]$$

aire du trapèze « sous » la courbe.

On considère donc la relation de récurrence : $s_n = s_{n-1} + \frac{T_e}{2\tau}\left[e_n + e_{n-1}\right]$.

A nouveau , on suppose que cette relation de récurrence est valide pour tous les entiers n.

En appliquant la transformation en z , on aboutit à :

$$S(z) = z^{-1}\,S(z) + \frac{T_e}{2\tau}\,(E(z) + z^{-1}\,E(z))$$

d'où

$$S(z) = \frac{T_e}{2\tau}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\,E(z) = \frac{T_e}{2\tau}\,\frac{z+1}{z-1}\,E(z)$$

1° cas : réponse « impulsionnelle ».

Soit $(e_n) = (d_n)$. On a alors $E(z) = 1$, donc

$$S(z) = \frac{T_e}{2\tau}\,\frac{z+1}{z-1} = \frac{T_e}{2\tau}\,\frac{2z+1-z}{z-1} = \frac{T_e}{2\tau}\left(2\frac{z}{z-1} - 1\right).$$

Par lecture inverse d'une table de transformées, on en déduit que :

$$s_n = \frac{T_e}{2\tau}\,\left(2U_n - d_n\right) \,.$$

Remarque :

Vérifions « à la main » ce résultat sur les premiers termes : $s_n = s_{n-1} + \frac{T_e}{2\tau}\left[e_n + e_{n-1}\right]$:

n	-1	0	1	2
e_n	0	1	0	0
e_{n-1}	0	0	1	0
s_{n-1}		0	$\frac{T_e}{2\tau}$	$\frac{T_e}{\tau}$
s_n	0	$\frac{T_e}{2\tau}$	$\frac{T_e}{\tau}$	$\frac{T_e}{\tau}$

En fait, dans ce cas, l'utilisation de la transformation en z est inutile. En pratique, on résout ce type de situation par ce type de tableau.

Remarque :
Si on applique le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})S(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\ \frac{T_e}{2\tau}\ \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \lim_{z\to 1}\frac{T_e}{2\tau}\left(1+z^{-1}\right) = \frac{T_e}{\tau}\ .$$

On notera que $S(z)$ admet 1 comme seul pôle simple.

2° cas : réponse « indicielle ».

On prend $e_n = 1$ pour tout entier n. Alors $E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$.

Donc : $S(z) = \frac{T_e}{2\tau}\ \frac{z+1}{z-1}\ .\ \frac{z}{z-1} = \frac{T_e}{2\tau}\ \frac{(z+1)z}{(z-1)^2}$.

Pour trouver l' « original », on décompose en éléments simples $\frac{S(z)}{z}$. Etant donné que 1 est pôle double, on admet qu'on peut écrire : $\frac{S(z)}{z} = \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{(z-1)}$.

Après avoir réduit au même dénominateur, par identification, on aboutit à :

$b = \frac{T_e}{2\tau}$ et $a = \frac{T_e}{\tau}$, d'où

$$S(z) = \frac{T_e}{\tau}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{T_e}{2\tau}\frac{z}{(z-1)}.$$

Dont on déduit immédiatement :

$$s_n = \frac{T_e}{\tau} n + \frac{T_e}{2\tau}.$$

<u>Remarque :</u>

Vérifions « à la main » ce résultat sur les premiers termes : $s_n = s_{n-1} + \frac{T_e}{2\tau}[e_n + e_{n-1}]$.

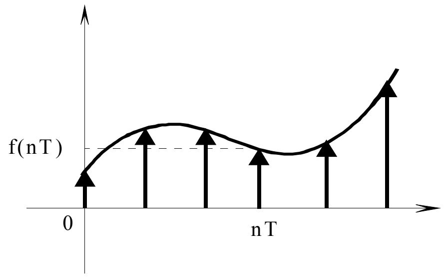
N	-1	0	1	2	3
e_n	0	1	1	1	1
e_{n-1}	0	0	1	1	1
s_{n-1}		0	$\frac{T_e}{2\tau}$	$\frac{3T_e}{2\tau}$	$\frac{5T_e}{2\tau}$
s_n	0	$\frac{T_e}{2\tau}$	$\frac{3T_e}{2\tau}$	$\frac{5T_e}{2\tau}$	$\frac{7T_e}{2\tau}$

On notera que ce filtre numérique rempli (qualitativement) son rôle d' « intégrateur », dans la mesure où il permet de passer d'un échelon à une rampe, comme précédemment, il a permis de passer de l'impulsion à l'échelon.

6. Lien avec la transformation de Laplace.

a) Pour modéliser un signal échantillonnée, au lieu de nous intéresser à la suite des valeurs $f(nT_e)$ on peut considérer la « distribution » $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,\delta_{nT_e}$, où δ_{nT_e} représente la « distribution de Dirac » décalée à nT_e .

On peut faire la représentation graphique suivante où la distribution définie ci-dessus est représentée par l'ensemble des « flèches » :



Si on calcule alors la transformée de Laplace de $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,\delta_{nT_e}$, en admettant une linéarité infinie, on a :

$$L\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,\delta_{nT_e}\right](p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,L\left[\delta_{nT_e}\right](p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\,e^{-nT_e p}$$

en appliquant le théorème du retard.

On voit donc que la transformée en z du signal échantillonnée peut se définir par :

$$Z[f]\,(z) = L\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\delta_{nT}\right](p) \text{ en posant } z = e^{T_e p}.$$

b) Un autre problème qui peut se poser en pratique, consiste, à partir de la transformée de Laplace d'un signal analogique, de chercher la transformée en z du signal échantillonné. Une première méthode est de trouver l'orignal de la transformée de Laplace connue et ensuite d'appliquer la transformation en z .

Exemple :

On considère la transformée de Laplace F définie par $F(p) = \dfrac{1}{p\,(p+1)}$.

A partir de $F(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, on déduit que l'original (continue) est défini par :

$$x(t) = (1 - e^{-t})\,U(t)\,.$$

Le signal échantillonnée est alors défini par :

$$x(n\,T_e) = 1 - e^{-n\,T_e},$$

dont on déduit que la transformée en z est définie par :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T_e}\,z^{-1}},$$

soit

$$X(z) = \frac{\left(1 - e^{-T_e}\right)z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - e^{-T_e}\,z^{-1}\right)}\,.$$

Eléments bibliographiques :

- Azan J.-L., *Précis d'électronique* 2e BTS/IUT (Bréal).

- Collet H. et alii, *Mathématiques BTS industriels Spécialités du groupement A* (Nathan 2002).

- Deluzerieux et Rami, *Cours d'électronique numérique et échantillonnée* (Eyrolles).

- Franklin G. et alii, *Digital Control of Dynamic Systems* (Addison-Wesley Publishing Company 1990).

- Gasquet C. et Witomski P., *Analyse de Fourier et applications* (Dunod, 2000).

- Levine W.S., *The Control Handbook* (CRC Press 1995).

- Manneville et Esquieux. *Electronique* (Dunod).

- Perdikaris G. A., *Computer Controlled Systems. Theory and applications* (Kluwer academic publishers 1991).

- Ogata K., Discrete-time Control Systems (Prentice Hall International Editions 1995).

- Reinhard H., *Eléments mathématiques du signal* (Dunod, 2002).

- Rivoire M., Ferrier J.-L., *Cours d'automatique Tome 1* (Eyrolles 1992).

- Sévely Y.. *Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés* (Dunod 1986).

- Tisserand E. et alii, *Analyse et traitement du signal. Méthodes et applications au son et à l'image* (Dunod).

- Verland B. et Saint-Pierre G., *Mathématiques, BTS industriels Groupement A*, (Foucher, 2002).

Annexe 1 : démonstration du théorème de la valeur finale.

Lemme.

Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite de nombres réels telle que la série entière définie par $\sum_{n \geq 0} x_n z^n$ ait pour rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On suppose que sa somme S est prolongeable en une fonction $\tilde{S}$ holomorphe définie sur ***C*** privé un ensemble fini de points, tous ces points étant de modules supérieurs à 1 sauf, éventuellement 1 qui est alors un pôle d'ordre 1.

Dans ces conditions, $\lim_{z \to 1} (1 - z)\, \tilde{S}(z) = \lim_{n \to +\infty} x_n$.

Démontration[9] *:*

Soit la fonction g définie par $g(z) = (1 - z)\, \tilde{S}(z)$.

A priori g n'est pas définie pour z = 1. Mais 1 étant un pôle d'ordre 1 de $\tilde{S}$, on peut définir g(1) par continuité.

Vu les hypothèses, g est alors holomorphe sur ***C*** privé d'un ensemble de points de modules tous supérieurs à 1 (strictement).

Cet ensemble de points étant fini, il existe ρ, supérieur à 1 (strictement), tel que g est holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ, noté *(D_ρ)*, donc g est développable en série entière en 0 sur ce disque *(D_ρ)*.

Ce développement est aussi valable sur le disque de centre 0 et de rayon 1, noté *(D_1)*.

Or sur ce disque*(D_1)*, les séries étant convergentes, on a pour | z | < 1 :

$$g(z) = (1 - z)\, \tilde{S}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} x_n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n-1})\, z^n + x_0,$$

qui est donc aussi le développement en série entière en 0 de g sur le disque *(D_ρ)*, donc en particulier pour z = 1(on rappelle que ρ est supérieur à 1), donc

$$g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n-1}) + x_0 = \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

Or par continuité, $\lim_{z \to 1} g(z) = \lim_{z \to 1} (1 - z)\, \tilde{S}(z) = g(1)$, donc $\lim_{z \to 1} (1 - z)\, \tilde{S}(z) = \lim_{n \to +\infty} x_n$.

C.Q.F.D.

---

[9] La lisibilité de cette démonstration doit beaucoup aux remarques faites par M. Antoine Rossignol.

Remarque:
Avec ces hypothèses, la démonstration montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ est finie.

Théorème de la valeur finale.

Soit une suite $(x_n)_{n \in N}$ et X sa transformée en z.

On suppose que X peut être prolongée en une fonction $\tilde{X}$ holomorphe sur ***C*** privé d'un nombre fini de points, tous à l'intérieur du cercle « unité », sauf éventuellement un pôle simple en 1. Alors :

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \tilde{X}(z) = \lim_{n \to +\infty} x_n .$$

Démonstration :

On définit S définie par $S(z) = X(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$.

Les hypothèses faites sur X entraîne que S vérifie les hypothèses du lemme. Donc :

$\lim\limits_{z \to 1} (1 - z) \tilde{S}(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ donc $\lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \tilde{S}(z^{-1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ donc

$\lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \tilde{X}(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. C.Q.F.D.

Annexe 2 : divers énoncés du théorème de la valeur finale.

1) Collet H. (et alii.) :

Si les limites existent et si les modules des pôles de $(Zf)(z)$ sont inférieurs ou égaux à 1, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{|z| \to 1} (z-1)\,(Zf)(z)$.

2) Franklin G. (et alii,) :

If F(z) converges for | z | > 1 and all poles ol (z – 1) F(z) are inside the unit circle then

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)\,F(z).$$

3) Levine W. S. :

If f(k) has a finie limit $f(\infty)$ has $k \to \infty$, then $f(\infty) = \lim\limits_{z \to 1}(z-1)\,F(z)$.

4) Ogata K. :

(…) all the poles of X(z) lie inside the unit circle with the possible exception of a simple pole at z = 1, then the final value of x(k), that is, the value of x(k) as k approaches infinity, can be given by

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1})\,X(z).$$

5) Perdikaris G. A. :

If $\mathcal{Z}$-transform of f(t) is F(z), and if the limit of F(z) $(1 - z^{-1})$ as z approaches unity exists then

$$f(\infty) = \lim_{k \to \infty} f(kT) = \lim_{z \to 1}(1-z^{-1})\,F(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\,F(z)$$

(…) requires that all of the poles of F(z) lie inside the unit circle except possibly for a pole at z = 1.

6) Reinhard H. :

Soit f un signal causal et F sa transformée en z alors si $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = l$ alors $F(z)$ existe pour $|z| > 1$ (au moins) et $l = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\,F(x)$.

7) Rivoire M. :

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, X(z) \text{ si la limite existe,}$$

cette limite $x(\infty)$ existe à condition que X(z) ait :

- tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité (module < 1)
- ou au plus un pôle réel de module égal à 1 les autres pôles étant de module inférieur à 1.

8) Sévely Y. :

$$\lim_{n \to \infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, F(z) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, F(z)$$

si cette limite existe.

8) Verlant B. (et alii) :

Soit *x* un signal causal discret. $\lim_{z \to 1} (z-1)\,(Zx)(z) = \lim_{n \to +\infty} x(n)$.

On trouve une note en marge : « On suppose que les limites mentionnées existent. »